# Ecole Supérieure de Commerce de Lyon 1982

# MATHEMATIQUES

## 1ère épreuve (option générale)

Nota : les deux problèmes sont indépendants.

### 1er PROBLEME

On se propose d'étudier l'application F définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}\,dt .$$

1 · a · Justifier l'existence de F(x) pour $x \in \mathbb{R}^+$ .

b · Montrer que F est décroissante et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ , 0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{\pi}{4} .$$

2 · a · Montrer que

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}[ , \frac{2}{\pi} t \leqslant \sin t .$$

b · En déduire successivement

$$\forall x > 0 , F(x) \leqslant \frac{\pi}{4x}(1 - e^{-x}) , \text{ et } \lim_{x \to +\infty} F(x) = 0 .$$

3 · a · Montrer que

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2 , |e^{-a} - e^{-b}| \leqslant |a - b| .$$

b · En déduire que

$$\forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^+)^2 , |F(x_1) - F(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$$

et que F est continue sur $\mathbb{R}^+$ .

4 · a · Pour $x_0 \in \mathbb{R}^+$ , justifier l'existence de $H(x_0) = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x_0 \sin t} \sin t\,dt$ .

b · En utilisant par exemple la formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2 , |e^{-a} - e^{-b} + (a-b)e^{-b}| \leqslant \frac{|a-b|^2}{2} .$$

c · En déduire l'inégalité

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^+ , \forall x \in \mathbb{R}^+ - \{x_0\} , \left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - H(x_0)\right| \leqslant \frac{\pi}{8}|x - x_0| .$$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer F' (x) pour $x \in \mathbb{R}^+$ .

5 · A tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , on associe la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = F(u_n) , n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

a · En utilisant 3-b., montrer qu'il existe $m \in [0, 1[$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N} , |u_{k+1} - u_k| \leqslant m^k |u_1 - u_0| .$$

b · En déduire que pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , $p > q$ :

$$|u_p - u_q| \leqslant \frac{m^q}{1-m} |u_1 - u_0|$$

et que, quel que soit $\alpha$, la suite associée est une suite de Cauchy et qu'elle converge vers une limite $\ell(\alpha)$ vérifiant

$$F(\ell(\alpha)) = \ell(\alpha) .$$

. . . / . . .

c - Montrer qu'il existe un seul $x \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $F(x) = x$ .

Que peut-on en conclure pour les suites construites précédemment ?

## 2ème PROBLEME

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à une indéterminée X à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2 .

On appellera B la base de E composée des polynômes 1, X et $X^2$ .

Le polynôme $F_\alpha$ étant défini par

$F_\alpha = \alpha 1 + X + X^2$ , $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

on désigne par $\varphi_\alpha$ l'application qui, à un polynôme P de E, associe le polynôme R de E, reste de la division euclidienne du produit $F_\alpha . P$ par le polynôme $X^3 - X$ .

$\varphi_\alpha (P)$ est donc le seul polynôme R vérifiant

$$\begin{cases} F_\alpha . P = (X^3 - X) . Q + R \\ R = 0 \text{ ou degré } (R) < 3 . \end{cases}$$

1 - a - Déterminer les polynômes $\varphi_\alpha (1)$ , $\varphi_\alpha (X)$ et $\varphi_\alpha (X^2)$ .

b - Montrer que $\varphi_\alpha$ est une application linéaire de E dans E .

c - Montrer que

$\varphi_\alpha - \lambda I_E = \varphi_{\alpha - \lambda}$ , $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,

où $I_E$ désigne l'application identique de E dans E .

2 - Déterminer la matrice $M_\alpha$ de $\varphi_\alpha$ relativement à la base B .

3 - a - Calculer le déterminant de $M_\alpha$ et discuter la bijectivité de $\varphi_\alpha$ en fonction du paramètre $\alpha$ .

b - Calculer la matrice inverse $M_\alpha^{-1}$ lorsque $M_\alpha$ est inversible .

4 - a - Montrer que Ker $\varphi_0$ , noyau de $\varphi_0$ , est l'ensemble des polynômes de E admettant 1 pour racine.

Déterminer Im $\varphi_0$ , image de $\varphi_0$ .

b - Montrer que Ker $\varphi_{-2}$ = Im $\varphi_0$ et Im $\varphi_{-2}$ = Ker $\varphi_0$ .

5 - a - Calculer les valeurs propres de $M_\alpha$ .

b - Déterminer les sous-espaces propres de $\varphi_\alpha$ (on pourra utiliser 1 - c -) .

$\varphi_\alpha$ est-elle diagonalisable ?

c - Construire une matrice T telle que

$$M_\alpha = T \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + 2 \end{bmatrix} T^{-1} .$$

6 - a - Montrer que

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha$ .

b - Calculer $\varphi_{-2} \circ \varphi_0$ .

Le résultat obtenu peut-il être déduit (sans calcul) de 4-b- ?

c - Calculer $(M_\alpha)^k$ , $k \in \mathbb{N}$ , et en déduire pour $\alpha \neq -1$ :

$$(\varphi_\alpha)^k = \frac{(\alpha + 2)^k - \alpha^k}{2} \varphi_\gamma \quad , k \in \mathbb{N}^* \text{ , avec } \gamma = \frac{2 \alpha^k}{(\alpha + 2)^k - \alpha^k} .$$

Exprimer $(\varphi_{-1})^k$ en fonction de k .

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail